

получение бугристой поверхности связующего обусловлено наличием в нем пузырей (пустот), образующихся при кипении. Эти пузыри могут сохранять свою целостность, а могут и лопаться. В процессе горячего прессования выход из стружечного пакета парогазовой смеси приводит к образованию более крупных полостей. В связи с этим, плотность отвержденной массы связующего значительно ниже той плотности, которую имело бы связующее при удалении влаги в целях получения монолитной массы.

По результатам исследований можно рассчитывать ряд параметров, представляющих практический интерес для совершенствования технологии и качества древесностружечных плит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Уголев Б. Н. Древесиноведение с основами товароведения.— М.: Лесн. пром-сть, 1986.— 111 с. [2]. Bosshard H. H. Die Mikrostruktur von Novoran-Spanplatten // Holz als Roh-und Werkstoff.— 1958.— N. 9.— S. 330—335.

Поступила 24 сентября 1990 г.

УДК 630*812.71

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДРЕВЕСИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

В. Н. ВОЛЫНСКИЙ

Архангельский лесотехнический институт

Ранее* была рассмотрена возможность определения реологических коэффициентов по диаграмме изгиба древесины, исходя из известной реологической модели. Она позволяет описывать диаграмму в координатах нагрузка — прогиб при постоянной скорости деформирования уравнением типа

$$y = ax + b(1 - e^{-x/c}), \quad (1)$$

где y — нагрузка;
 x — прогиб;

a, b, c — коэффициенты уравнения, зависящие от деформационных свойств древесины.

Опыты показывают, что уравнение (1) не в полной мере соответствует реальной диаграмме. Расчеты дают отрицательное время релаксации, что не имеет физического смысла и заставляет сомневаться в правильности исходной реологической модели.

Все диаграммы представляют из себя S-образные кривые, имеющие точку перегиба (рис. 1). Хотя нелинейность начального участка невелика, но, как нам кажется, она может иметь принципиальное значение для понимания процессов, протекающих при изгибе древесины и других материалов. Исходя из того, что весь процесс деформирования, вплоть до разрушения образца, представляет единый физический процесс, нами принята зависимость, описывающая диаграмму $P(f)$ во всем диапазоне нагружения. Наиболее подходящей оказалась «логистическая» кривая, выражаемая уравнением, предложенным В. Ф. Дунаевым (ЦНИИМОД):

$$y = \frac{a}{1 + e^{-b(x-c)}} - d. \quad (2)$$

* Волынский В. Н. Определение реологических коэффициентов по диаграмме изгиба древесины // Лесн. журн.— 1986.— № 5.— С. 63—67.— (Изв. высш. учеб. заведений).

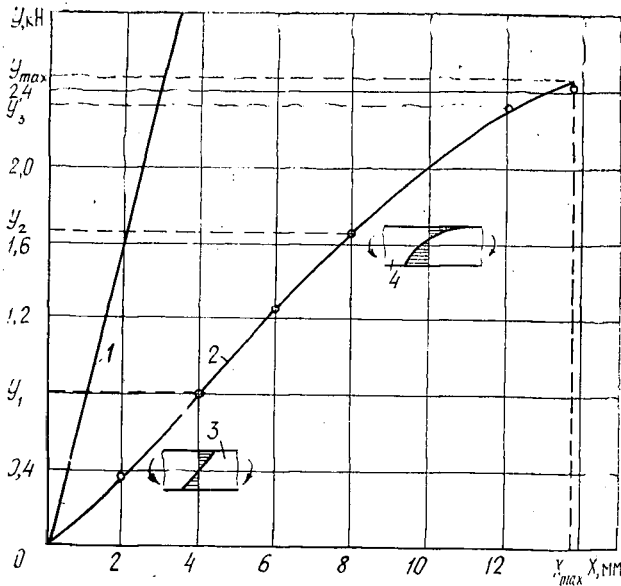


Рис. 1. Диаграмма испытания древесины на изгиб: 1 — линия перемещения захвата силоизмерителя; 2 — линия прогибов; 3 — эпюра распределения нормальных напряжений в образце для упругих деформаций; 4 — то же для пластических деформаций в зоне сжатия

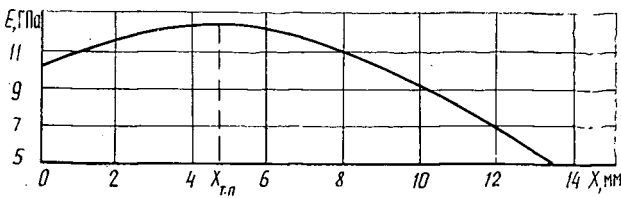


Рис. 2. График изменения текущего модуля упругости при изгибе древесины

В нашем случае $d = 0$, а уравнение (2) преобразуется к виду:

$$y = k \frac{e^{mx} - 1}{e^{mx} + n}, \quad (3)$$

где $k = \frac{a e^{bc}}{1 + e^{bc}}$; $m = b$; $n = e^{bc}$.

Графикам, представленным на рис. 1, 2, можно дать следующее физическое объяснение. В начальный момент нагружения в работу включается хоть и большая часть волокон древесины, но не все волокна. Это равносильно тому, что в самый начальный момент работает какая-то часть сечения образца, а модуль упругости* имеет минимальное значение. По мере нагружения жесткость образца возрастает как за счет увеличения фактического рабочего сечения образца, так и за счет появления уплотненной древесины в зоне сжатия. Эпюра распределения нормальных напряжений по толщине образца выражена прямой линией, угол наклона которой уменьшается по мере увеличения нагрузки. В момент, соответствующий точке перегиба на диаграмме $P(f)$, устойчивость сжатых волокон нарушается и на сжатом участке появляется зона пластических деформаций, т. е. складка сжатия. После этого модуль упругости быстро снижается при почти не изменяющемся напря-

* Под модулем упругости здесь понимается переменный коэффициент, связывающий нагрузку и прогиб, а не константа древесины.

жении сжатия вдоль волокон, которое зависит теперь не от деформации, а от скорости деформирования. Эпюра нормальных напряжений становится нелинейной, так как в растянутой зоне изгибаемого образца напряжения продолжают расти и нейтральная ось образца сдвигается в сторону растянутой части. Разрушение образца происходит от разрыва растянутых волокон.

Мнение о том, что нелинейность начального участка связана с обмятием древесины и покоробленностью образцов, является ошибочным. При испытании сосновых образцов на пролете 340 мм по трехточечной схеме нагружения использовали не круглые, а плоские опоры и нагружающий нож и этим практически сводили смятие древесины до нуля. Некоторую покоробленность образцов устраняли уже при нагрузке 20...30 Н, что составляет около 1 % от разрушающей нагрузки, поэтому она также не могла сколько-нибудь заметно отражаться на характере диаграммы нагрузка — прогиб.

Всего испытано 110 образцов сечением 50×17 мм. Для каждого образца определяли плотность, фиксировали наклон волокон и годичных слоев, наличие заболонной и ядровой древесины, снимали диаграмму $P(f)$. Установлено, что все диаграммы могут быть выражены зависимостью (3).

При расчете коэффициентов, входящих в формулу (3), необходимо иметь три уравнения с тремя неизвестными k , m , n . Для этого, задавая шагом t по оси x , снимали на диаграмме три значения нагрузки y_1 , y_2 , y_3 . После преобразования формулы (3) получаем следующие уравнения:

$$e^{mt} = \frac{y_1 n + k}{k - y_1};$$

$$e^{2mt} = \frac{y_2 n + k}{k - y_2};$$

$$e^{3mt} = \frac{y_3 n + k}{k - y_3}.$$

Путем последовательного деления равенств друг на друга и после алгебраических преобразований пришли к квадратному уравнению

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Для положительных значений x и y имеем

$$k = p/2 + \sqrt{(p/2)^2 + q}, \quad (4)$$

где
$$p = \frac{Q_6(Q_1 - Q_2)}{Q_4 Q_3 + Q_5(Q_1 - Q_2)}; \quad q = \frac{p Q_3}{Q_1 - Q_2}.$$

Здесь $Q_1 = (2y_1 - y_2) y_3; \quad Q_4 = y_1 + y_2 - y_3;$

$$Q_2 = (y_1 + y_2 - y_3) y_1; \quad Q_5 = y_1 y_2;$$

$$Q_3 = (y_2 - y_3) y_1^2; \quad Q_6 = y_1 y_2 y_3.$$

После определения коэффициента k найдем остальные два неизвестных параметра

$$n = 1 + k \frac{Q_1 - Q_2}{Q_3}; \quad m = \frac{1}{t} \ln \frac{k + y_1 n}{k - y_1}. \quad (5)$$

Проведенные расчеты позволяют сопоставлять теоретическую кривую с фактической. Вычисления показывают, что если шаг измерения t достаточно велик и три замера нагрузки охватывают почти весь диапазон нагружения, то совпадение теоретической кривой, рассчитанной по формуле (3), с реальной диаграммой, полученной с помощью диаграм-

много аппарата испытательной машины, почти абсолютное. В частности, для образца, результаты испытания которого представлены на рис. 1, при $t = 4$ мм и $y_1 = 0,8$ кН, $y_2 = 1,64$ кН, $y_3 = 2,3$ кН имеем $k = 3,13$ кН, $n = 2,512$ и $m = 1,978$. Следовательно, уравнение (3) можно записать в виде

$$y = 3130 \frac{e^{1,978x} - 1}{e^{1,978x} + 2,512}.$$

При малом шаге измерения t возможны расхождения теоретической кривой с экспериментальной диаграммой, так как формулы расчета очень чувствительны к точности задания исходных данных. Это показывает, что использовать предлагаемую математическую модель для прогнозирования предельной нагрузки или предельного прогиба затруднительно.

Зависимость (3) позволяет анализировать, как меняется модуль упругости в ходе деформирования образца. Во-первых, нужно отметить, что он не остается постоянным даже на начальной ступени нагружения. Поэтому определяемый стандартными методами модуль упругости является некоторой усредненной и приближенной величиной. Фактически при изгибе древесины можно говорить лишь о мгновенном модуле упругости, как о первой производной нагрузки по прогибу:

$$E = \frac{d}{dx} \left(\frac{l^3}{4bh^3} y \right) = \frac{l^3}{4bh^3} \frac{km e^{mx} (n+1)}{(e^{mx} + n)^2}, \quad (6)$$

где l — расстояние между опорами;
 h — толщина образца.

Минимальный модуль упругости определяют из условия $x = 0$

$$E_{\min} = \frac{km}{n+1} \frac{l^3}{4bh^3}. \quad (7)$$

Максимальное значение модуль упругости принимает в точке перегиба (рис. 2), т. е. там, где вторая производная равна нулю:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = km^2 (n+1) \frac{e^{mx} (n - e^{mx})}{(e^{mx} + n)^3} = 0.$$

Отсюда следует $n - e^{mx} = 0$.

Абсцисса точки перегиба может быть определена из следующего условия:

$$x_{т. п} = (\ln n)/m. \quad (8)$$

Подставляя это значение в формулу (6), получаем выражение для максимального модуля упругости:

$$E_{\max} = \frac{km(n+1)}{4n} \frac{l^3}{4bh^3}. \quad (9)$$

Отношение E_{\max}/E_{\min} может служить характеристикой нелинейности начального участка диаграммы

$$E_{\max}/E_{\min} = (n+1)^2/(4n). \quad (10)$$

Поскольку последняя величина зависит только от n , то этот параметр можно считать характеристикой нелинейности начального участка диаграммы нагрузка — прогиб. Как видно из рис. 1, 2, даже при незначительной на первый взгляд нелинейности, разница в модулях упругости довольно существенная. Для разобранный случая имеем $E_{\min} = 10,2$ ГПа и $E_{\max} = 12,5$ ГПа, что дает разницу в 22,5%. Интересно заметить, что при $n = 1$ минимальный и максимальный модули упругости

равны. Это происходит потому, что точка перегиба смещается в начало координат. Для этого частного случая снижение модуля упругости наблюдается сразу после начала нагружения. Как следует из наших опытов, для древесины n всегда больше 1.

Расчет модулей упругости выполнен на испытательной машине Р-0,5 с учетом податливости силоизмерителя. При абсолютно жестком силоизмерителе имеем

$$y'(x) = dx/dy = \operatorname{tg} \alpha.$$

В реальной машине перемещение пассивного захвата увеличивает тангенс угла наклона прямой

$$y'(x) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Податливость системы образец — приспособление складывается из суммы податливости ее компонентов

$$1/y' = 1/y'_ф + c,$$

где $y'_ф$ — фактическая жесткость образца;
 c — податливость силоизмерителя.

Отсюда

$$E = \frac{l^3}{4bh^3(1/y'_ф + c)}. \quad (11)$$

Для машины Р-0,5 при испытании на шкале № 3 (до 5 кН) величина $c = 1,48 \cdot 10^{-3}$ мм/Н и учет ее обязателен. При $c \rightarrow 0$ формула (11) принимает обычный вид

$$E = \frac{l^3}{4bh^3} y'.$$

Формула (8) позволяет определять нагрузку при деформации, соответствующей точке перегиба. Подставляя значение $x_{т.п}$ в формулу (3), получаем:

$$y_{т.п} = k(n-1)/(2n). \quad (12)$$

Согласно нашим предположениям, в точке перегиба достигается предел упругости при сжатии.

Коэффициент k , входящий в формулу (3), представляет собой асимптоту функции, поскольку при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow k$. Поэтому можно сказать, что k выражает ту предельную нагрузку, которую способен выдерживать образец, если его упругость будет полностью исчерпана, т. е. модуль упругости будет равен нулю. На самом деле ни у одного образца в момент разрушения модуль упругости не равен нулю. Замечено, что при высоком значении предельного модуля упругости наблюдаются хрупкое разрушение образцов, при низком — зацепистое. Показатель степени m определяет угол наклона графика, но по своей сути не является характеристикой упругости, так как первая производная включает все три параметра.

По предлагаемой математической модели можно точно рассчитывать работу, затраченную на деформирование образца путем интегрирования основной функции в пределах от 0 до x_{\max}

$$A = k \int_0^{x_{\max}} \frac{e^{mx} - 1}{e^{mx} + n} dx. \quad (13)$$

В заключение отметим, что эта математическая зависимость достаточно хорошо описывает реальный процесс деформирования древесины